Die Geschichte

der

Approximationen

der

Zahl π

Fachbereichsarbeit
aus
Mathematik

eingereicht von Werner Scholz 8.A
betreut durch Mag. Ingrid Breyer

1993/94

GRG XIII Wenzgasse 7
3. verbesserte Version: 03.11.2001

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Die Idee zum Thema dieser Fachbereichsarbeit kam mir bei der Suche nach einem geeigneten Inhalt eines Referats für das Wahlpflichtfach Mathematik. Ich hatte zwar im Schulunterricht schon gehört, daß sich Mathematiker seit vielen Jahrhunderten mit der Zahl π beschäftigen, und noch viel öfter mit dieser Zahl gerechnet, doch was wirklich für ein Aufwand hinter der Berechnung von π steckte, war mir verborgen geblieben. So machte ich es mir zur Aufgabe, dieses Thema in meinem Referat etwas genauer zu beleuchten.

Auf die Möglichkeit, dieses Referat zu einer Fachbereichsarbeit auszubauen, machte mich erst meine Mathematikprofessorin Frau Mag. Ingrid Breyer aufmerksam. Ich möchte ihr an dieser Stelle herzlich dafür danken, daß sie mich auf diese Idee brachte, mir die Abfassung meiner ersten kleinen wissenschaftlichen Arbeit ermöglichte und mir dabei stets hilfreich und ermunternd zur Seite stand.
Weiters möchte ich Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel danken, daß er mich auf einen Großteil des verwendeten Materials aufmerksam machte und mir selbiges zur Verfügung stellte, sodaß ich aus dem vollen schöpfen konnte und Zugang zu vielen Arbeiten über π erhielt, die mir sonst verborgen geblieben wären.
Auch meinen Eltern möchte ich meinen Dank dafür aussprechen, daß sie mir einerseits die Ausstattung mit einem PC, auf dem ich diese Fachbereichsarbeit erstellen konnte, zur Verfügung stellten und andererseits viel Zeit geschenkt haben, damit ich auch in Ruhe meine Arbeit fertigstellen konnte.

In dieser Fachbereichsarbeit wird die Geschichte der Approximationen der Zahl π, d.h. die im Laufe der Zeit immer genauere Bestimmung des Werts von π beschrieben. Bedeutende Mathematiker und ihre Methoden werden dabei (möglichst in chronologischer Reihenfolge) präsentiert, sofern das mit dem mathematischen „Handwerkszeug“ eines Schülers der 8. Klasse möglich und nachvollziehbar ist. Der Bogen spannt sich dabei vom antiken Ägypten bis ins Computerzeitalter des 20. Jahrhunderts, wobei die Arbeit durch zwei Computerprogramme und zwei Tabellen mit Termen zur Approximation von π und zur Geschichte der Näherungen abgerundet wird.

2. Das Altertum

2.1. Ägypten

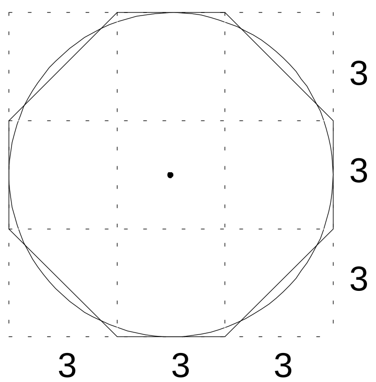
Die Geschichte der Approximationen von π ist über 4000 Jahre alt *(vgl. PEITGEN 1992, S.172f.)*, und erste Ergebnisse wurden in Ägypten schon um 1850 v.Chr. im „Moskauer Papyrus“ und um 1650 v.Chr. im „Papyrus Rhind“ schriftlich festgehalten. Man fand beispielsweise die Näherung $\pi \approx 3\frac{1}{6} = 3{,}1\dot{6}$. Letzterer Papyrus enthält in Hieroglyphenschrift Aufgabentexte des Schreibers Ahmes zur Geometrie, wobei in der 50. Aufgabe die Behauptung aufgestellt wird, daß ein Quadrat, dessen Seitenlänge um $\frac{1}{9}$ kürzer sei als der Durchmesser eines Kreises, denselben Flächeninhalt habe wie dieser.

In moderner Schreibweise bedeutet das: $r^2\pi \approx \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2$

Vereinfachen bringt: $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605$

MAX BAUER *(1927/28, S.3)* vermutet, daß die Idee für diese Beziehung dem Vergleich von wassergefüllten zylindrischen und quaderförmigen Behältern entsprungen sein könnte. Das Produkt aus der Höhe des Wasserspiegels (bei derselben Wassermenge in den Gefäßen) und der jeweiligen Grundfläche muß gleich sein, sodaß man aus dem Verhältnis der Höhen das Verhältnis der Grundflächen der Gefäße berechnen kann.

Eine zweite Herleitung, die dem 48. Problem des Schreibers Ahmes im Papyrus Rhind entspricht, führt folgendermaßen zur selben Näherung *(vgl. MÄDER 1989, S.50f.)*: Der in der Skizze erkennbare Kreis hat den Radius $\frac{9}{2}$ E. Sein Flächeninhalt beträgt ungefähr $63\,E^2$, da der Kreis von fünf Quadraten mit dem Flächeninhalt $9\,E^2$ und vier Dreiecken mit dem Flächeninhalt $\frac{9}{2}\,E^2$



annähernd ausgefüllt wird. Die Formel für den Flächeninhalt war den ägyptischen Mathematikern schon bekannt, sodaß sich daraus ergibt:

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 5 \cdot 3^2 + 4 \cdot \frac{3^2}{2} = 45 + 18 = 63 \approx 64$$

Daraus folgt: $$\pi \approx \frac{64}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{8}{1}\right)^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2$$

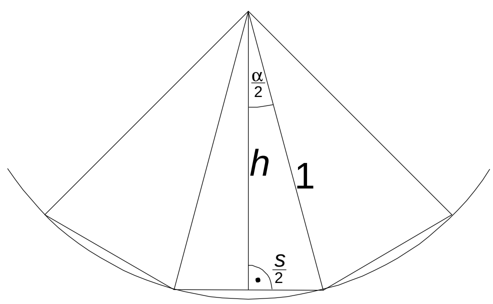
Es könnte aber auch schon vor der Abfassung des Papyrus Rhind bessere Approximationen gegeben haben: POSAMENTIER *(The Mathematics Teacher v. 77(1); S.52,47)* führt das Buch „La Science Mystérieuse des Pharaons“ von Abbé Moreux (Paris 1923) an, wo auf den Seiten 28-29 eine vermutete Näherung von 3,14159294 angegeben wird. *(zitiert nach MÄDER 1989, S.55)*

2.2. Babylonien

Ungefähr zur selben Zeit (1900-1600 v.Chr.) gab es auch schon in Babylonien erste Approximationen für π. Eine solche Näherung stellte der Wert 3 dar. Dieser könnte durch Einschreiben eines 12-Ecks in den Einheitskreis entstanden sein: [*]

Wie man in der Zeichnung erkennt, gelten die beiden Beziehungen:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{1} = h \quad \text{und} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{1} = \frac{s}{2}$$



Da im 12-Eck $\alpha = \frac{360°}{12} = 30°$ ist,

errechnet sich der Flächeninhalt des 12-Ecks dann folgendermaßen:

---

[*] Diese Annahme stammt aus dem „Telekolleg II Mathematik“ des Bayerischen Rundfunks und des Südwest 3. In der am 6. Juli 1993 ausgestrahlten Sendung wurde diese Idee präsentiert.

$$A_{12} = 12 \cdot \frac{s \cdot h}{2} = 6 \cdot s \cdot h = 6 \cdot 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 12 \cdot \frac{1}{2} \sin\alpha = 6 \cdot \sin 30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

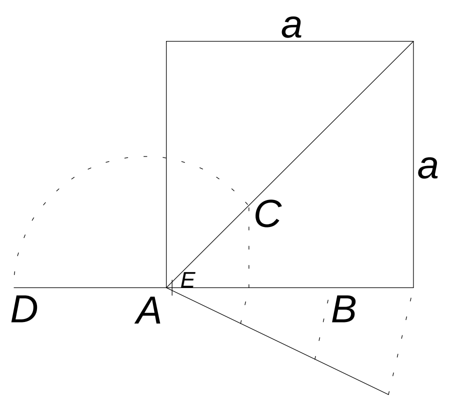
Damit wäre π durch den Wert 3 approximiert.
Keilschrifttexte, die 1936 in Susa entdeckt wurden, führen für π den Wert $3\frac{1}{8} = 3{,}125$ an. *(vgl. WIESENBAUER 1976, S.301)*

2.3. Bibel (ca. 550 v.Chr.) und Talmud (ca. 500 v.Chr.)

Der Wert der Zahl π findet sich sogar schon in der Bibel. Im AT im 1. Buch der Könige 7, 23 heißt es:„Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum anderen zehn Ellen..., und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum.“ π wird hier also mit dem Wert 3 approximiert.
Im Talmud heißt es: „Was im Umfange drei Handbreiten hat, ist eine Hand breit.“ Auch hier wird für π der Wert 3 angenommen. Der Rabbi Nehemiah gab 150 n.Chr. den Wert für π mit $3\frac{1}{7} \approx 3{,}1429$ an. *(vgl. WIESENBAUER 1976, S.301)*

2.4. Indien

Die Priesterhandbücher „Sulba-sûtras“ (aus dem 8. Jhdt. v.Chr.) geben die Approximationen $\sqrt{\frac{\pi}{4}} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right)$ und $\sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx \frac{2+\sqrt{2}}{3}$ (π ist dann $\approx \frac{18}{3+2\sqrt{2}}$) an, was π die Werte ≈3,088326 bzw. ≈3,088311 zuordnet. *(vgl. EHRENFRIED HOFMANN 1953, S.18f.)* Die Erklärung für letzteren liefert die folgende Vorgehensweise *(vgl. BAUER 1928, S.)*
Der Priester **Baudhayana** (6. Jhdt. v.Chr.) schlägt nämlich einen ganz neuen Weg bei der Umwandlung eines Quadrates in einen flächengleichen Kreis ein.



Er verwendet (wahrscheinlich willkürlich) die Summe aus der Seitenlänge a und der Diagonalen des Quadrates, die den Durchmesser d des flächengleichen Kreises angeben soll. Diese läßt sich daher folgendermaßen berechnen:

$$d = \frac{2}{3}a + \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

Nebenstehende Skizze zeigt, wie man konstruktiv zur Lösung gelangt. Da $\overline{AB} = \frac{2a}{3}$ und $\overline{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ ist $\overline{BD} = d$.

E ist nun der Halbierungspunkt auf $\overline{BD}$, sodaß $\overline{BE} = \overline{DE}$ den Radius darstellt.

Für den Radius erhält man: $r = \frac{a}{6}\left(2+\sqrt{2}\right)$

Einsetzen in die Flächenformel des Kreises und Gleichsetzen mit dem Quadrat ergibt:

$$\frac{a^2}{36}\left(4+4\sqrt{2}+2\right)\pi = a^2$$

Isoliert man π, so erhält man: $\pi = \frac{18}{\left(3+2\sqrt{2}\right)} \approx 3{,}0883$

Um 500 v.Chr. waren für π Näherungen wie zum Beispiel $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = 3{,}0625$ oder noch öfter $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ in Gebrauch, sodaß letzterer Wert oft als „Hinduwert" bezeichnet wird. *(vgl. MÄDER 1989, S.51* und *WIESENBAUER 1976, S.302)*

Daneben fand der „praktische" Wert 3 sehr oft Anwendung.

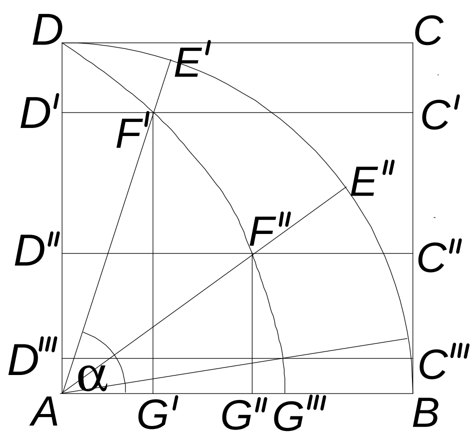
2.5. Griechenland

Antiphon (430 v.Chr.) war der Meinung, daß die Quadratur des Kreises und damit die exakte Bestimmung von π möglich sein müsse, da sich jedes Polygon in ein Quadrat verwandeln läßt. Seine Idee ging nämlich davon aus, dem Kreis Vielecke mit immer größerer Seitenzahl einzuschreiben, sodaß diese schließlich nicht mehr vom Kreis unterscheidbar sind und damit der Kreis völlig „erschöpft" ist. Auf Grund dieser Vorgehensweise nennt man diese Technik „Exhaustions-Methode“ *. Damit legte Antiphon den Grundstein für die erfolgreiche Arbeit vieler Mathematiker in späterer Zeit nicht zuletzt des Archimedes, der eben diese Methode anwandte. *(vgl. BAUER 1928, S.6)*

Ein Zeitgenosse Antiphons, **Bryson von Herakläa**, glaubte, daß die Kreisfläche das arithmetische Mittel aus dem Flächeninhalt des um- und eingeschriebenen Vielecks sei. Obwohl wir heute wissen, daß das nicht korrekt ist, war Brysons Arbeit dennoch wichtig, da er den Begriff einer oberen und unteren Schranke einführte. *(vgl. BAUER 1928, S.6)*

2.5.1. Hippias von Elis (ca. 425 v.Chr.)

Seiner Idee lag die Erweiterung der klassischen Konstruktionsmethoden, die sich auf die Verwendung von Zirkel und Lineal beschränkten, durch eine neue Kurve zugrunde, mit der die Quadratur des Kreises schließlich gelungen sein soll. Die „Quadratrix“ des Hippias wird mechanisch wie folgt erzeugt:



Definition der „Quadratrix“: Ein Viertelkreis mit dem Radius *AB* dreht sich gleichmäßig im Quadrat *ABCD* von *D* nach *B* um *A*. (Die gestrichenen Punkte geben die sich im Laufe der Bewegung ändernde Position an. *C, D*, *E*, *F* und *G* sind solche „wandernde“ Punkte, wobei gleich gestrichene zum selben Zeitpunkt an der jeweiligen Position sind). Da sich gleichzeitig eine Strecke *C´D´* gleichmäßig von *CD* aus parallel zu *CD* nach *AB* bewegt, bilden die Schnittpunkte dieser sich nach unten bewegenden Strecke mit dem sich in Richtung *B* aufspannenden Bogen den Ort der neuen Kurve. Die Winkelgeschwindigkeit von $\angle DAE$ ist dabei proportional zur Geschwindigkeit, mit

---

* Der Ausdruck stammt ursprünglich aus dem Griechischen. Der lateinische Ausdruck heißt „exhaurire“, was herausnehmen, erschöpfen, vollenden bedeutet.

der sich *C´D´* nach unten bewegt, sodaß *C´D´* die Seite *AB* erreicht, wenn $\angle DAE = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$. Mit α ist $\angle BAE$ gemeint.

Nach Definition gilt: $\angle BAD : \angle BAE = \frac{\pi}{2} : \alpha$

Die Bogenlängen verhalten sich folgendermaßen:

$$\overset{\frown}{BED} : \overset{\frown}{EB} = \frac{\pi}{2} : \alpha$$

Außerdem existiert die Proportion: $\overline{AB} : \overline{FG} = 1 : \frac{2\alpha}{\pi} = \frac{\pi}{2} : \alpha$ (1)

Weiters gilt: $\sin\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}$

Umformen und erweitern mit $\frac{1}{\overline{AB}}$ ergibt: $\frac{\sin\alpha \cdot \overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AB}}$

Verwendet man (1) und ersetzt die Quadratseite *AB* durch *a* und *AF* durch *s*, so ergibt sich:

$$\frac{\sin\alpha \cdot s}{a} = \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}}$$

Neuerliches Umformen ergibt: $\frac{s \cdot \sin\alpha}{\alpha} = \frac{2a}{\pi}$

Unter der Voraussetzung des Limesbegriffs kann man nun den Grenzübergang für α gegen 0 durchführen.

$$\frac{2a}{\pi} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{s \cdot \sin\alpha}{\alpha} = s = \overline{AF'''} = \overline{AG'''} \qquad (2)$$

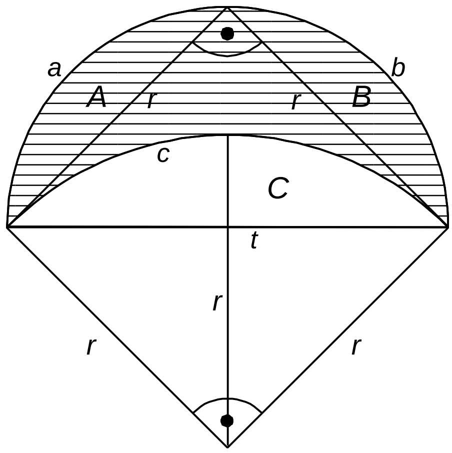
Der Bogen $\overset{\frown}{BED}$ ist ein Viertelkreis. Seine Länge beträgt daher nach der Formel für den Kreisumfang $\frac{2r\pi}{4} = \frac{r\pi}{2}$, wobei dem Radius *r* die Seite $AB = a$ entspricht. Folglich beträgt die Länge des Bogens $\frac{a\pi}{2}$, was entsprechend (2) gleichbedeutend ist mit $\frac{a^2}{\overline{AG'''}}$. π ist somit durch $\frac{2a}{\overline{AG'''}}$ definiert, wodurch sich auch die Kreisfläche bestimmen läßt.

Konkret wird durch die Strecke AG''' der Radius eines Kreises festgelegt, dessen Umfang genau gleich ist jenem des Quadrats, in dem die „Quadratrix" konstruiert wurde: Der Umfang des Quadrats beträgt $4 \cdot \overline{AB} = 4a$. Der Umfang des Kreises mit dem Radius AG''' beträgt $2 \cdot \overline{AG'''} \cdot \pi = 2 \cdot \frac{2a}{\pi} \cdot \pi = 4a$. Er ist also genau gleich groß wie jener des Quadrats. *(vgl. MAINZER 1980, S.34)*

2.5.2. Hippokrates von Chios (5. Jhdt. v.Chr.)

Er lieferte die erste präzise Definition, daß der Flächeninhalt von Kreisen immer im selben Verhältnis zum Quadrat des Durchmessers steht. Außerdem weckte er die Hoffnung, daß die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal in einer endlichen Anzahl von Schritten lösbar sei, da es ihm gelang, verschiedene „Möndchen“ zu quadrieren.

Er betrachtete zunächst ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck in einem Halbkreis. Die drei Viertelkreisbögen *a*, *b* und *c*, die das Möndchen bilden, schließen mit den Katheten beziehungsweise der Hypotenuse die drei Kreissegmente *A*, *B* und *C* ein. Hippokrates bewies nun, daß $A + B = C$ gilt.



Der Flächeninhalt des Viertelkreissegments *C* läßt sich berechnen, indem man vom Flächeninhalt des Viertelkreises jenen des gleichschenkeligen Dreiecks darunter abzieht.

$$C = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{2r^2}{4} = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$$

Gemäß dem pythagoreischen Lehrsatz gilt zwischen *r* und *t* die Beziehung $2r^2 = t^2$. Der Flächeninhalt des Viertelkreissegments *C* läßt sich folglich durch die Länge der Sehne *t* berechnen:

$$C = \frac{t^2}{8}(\pi - 2) \qquad (1)$$

Aus Symmetriegründen ist *A* natürlich gleich groß wie *B*, weshalb sich die Summe von *A* und *B* gemäß obiger Formel ausdrücken läßt, wobei *t* natürlich durch die neue Sehne *r* ersetzt wird:

$$A + B = 2A = 2 \cdot \frac{r^2}{8}(\pi - 2) = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$$

Da $r^2 = \frac{t^2}{2}$ gilt, erhält man weiters:

$$A + B = \frac{t^2}{8}(\pi - 2)$$

Da dieser Ausdruck äquivalent zu (1) ist, ist bewiesen, daß die Summe der Flächeninhalte von *A* und *B* gleich jenem von *C* ist. Daraus folgt, daß der

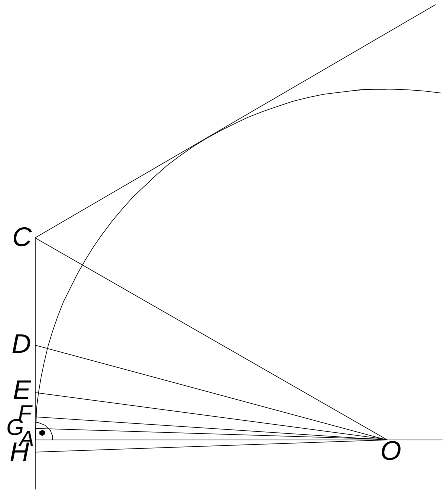
Flächeninhalt des Möndchens gleich jenem des gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreiecks ist: $A_{\text{Möndchen}} = \frac{r^2}{2}$

Ganz ähnlich lassen sich auch Möndchen „quadrieren“, denen ein Trapez zugrunde liegt. *(vgl. MAINZER 1980, S.33)*

Euklid (ca. 350 v.Chr.) gelang der Beweis, daß $3 < \pi < 4$ gilt. Doch erst Archimedes konnte rund 100 Jahre später diese Ungleichung verfeinern.

2.5.3. Archimedes (287 - 212 v. Chr.):

(vgl. BAUER 1928, S.6ff.)



Ausgangspunkt der Berechnungen des Archimedes war der Einheitskreis, dem er regelmäßige 6-Ecke ein- und umbeschrieb. In nebenstehender Skizze erkennt man einen vergrößerten Ausschnitt dieser Konstruktion.

O sei der Mittelpunkt, *A* der Berührungspunkt einer Tangente, die eine Seite des umbeschriebenen 6-Ecks bildet. Da ein regelmäßiges 6-Eck aus 6 gleichseitigen Dreiecken besteht und AO als Höhe auf *AC* eines davon halbiert folgt, daß

$$\angle AOC = \frac{\frac{360°}{6}}{2} = 30°.$$

Daraus folgt $\overline{AO} : \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153$ *

und weiters $\overline{CO} : \overline{AC} (= 2 : 1) = 306 : 153$

Addition der beiden Proportionen ergibt:

$$\left(\overline{CO} + \overline{AO}\right) : \left(2 \cdot \overline{AC}\right) > 571 : (2 \cdot 153) \qquad (1)$$

Nun verdoppelt man die Seitenzahl zum 12-Eck, indem man $\angle AOC$ halbiert (stellvertretend für alle 6 Winkel in *O*). Daraus ergibt sich der

---

* Es ist nicht bekannt, wie Archimedes zu diesem Ergebnis kommt, er mußte aber schon gewußt haben, daß $\frac{265}{153} \left(\approx 1{,}732026\right) < \sqrt{3} \left(\approx 1{,}73205\right)$ gilt.

neue Punkt *D*. AD ist daher eine halbe Seite des neuen 12-Ecks. Folglich gilt $\overline{AD} = \overline{A'D}$.

Weiters gilt: $\overline{CO}:\overline{AO} = \overline{CD}:\overline{AD}$

Daraus folgt: $\left(\overline{CO}+\overline{AO}\right):\overline{AO} = \left(\overline{CD}+\overline{AD}\right):\overline{AD}$

Und schließlich: $\left(\overline{CO}+\overline{AO}\right):\overline{AO} = \overline{AC}:\overline{AD}$

Nach Vertauschen der Innenglieder erhält man: $\left(\overline{CO}+\overline{AO}\right):\overline{AC} = \overline{AO}:\overline{AD}$

Einsetzen in (1) ergibt: $\overline{AO}:\overline{AD} > 571:153$ (2)

Quadrieren: $\overline{AO}^2:\overline{AD}^2 > 571^2:153^2$

Und „erweitern“: $\left(\overline{AO}^2+\overline{AD}^2\right):\overline{AD}^2 > \left(571^2+153^2\right):153^2$ (3)

$\overline{AO}^2+\overline{AD}^2$ ist gemäß dem pythagoreischen Lehrsatz gleich $\overline{OD}^2$, was man in (3) einsetzen kann:

$$\overline{OD}^2:\overline{AD}^2 > 349450:153^2$$

Wurzelziehen ergibt: $\overline{OD}:\overline{AD} > 591\frac{1}{8}:153$

Addition mit (2) ergibt: $\left(\overline{AO}+\overline{DO}\right):2\overline{AD} > \left(591\frac{1}{8}+571\right):2\cdot 153$ (4)

Verdoppeln der Seitenzahl zum 24-Eck bedeutet neuerlich ein Halbieren von $\angle AOD$ durch die Gerade *OE*.

Genauso, wie oben stellt man der Reihe nach folgende Proportionen auf:

$$\overline{DO}:\overline{AO} = \overline{DE}:\overline{AE}$$

$$\left(\overline{AO}+\overline{DO}\right):\overline{AO} = \overline{AD}:\overline{AE}$$

$$\left(\overline{AO}+\overline{DO}\right):\overline{AD} = \overline{AO}:\overline{AE}$$

Das läßt sich nun in (4) einsetzen: $\overline{AO}:\overline{AE} > \left(591\frac{1}{8}+571\right):153$

Und ergibt: $\overline{AO}:\overline{AE} > 1162\frac{1}{8}:153$ (5)

Wie vorhin „erweitert“ man nun:

$$\left(\overline{AO}^2+\overline{AE}^2\right):\overline{AE}^2 > \left(1350534\frac{33}{64}+23409\right):153^2$$

Nun wendet man den Satz von Pythagoras an und radiziert:

$$\overline{OE}:\overline{AE} > 1172\frac{1}{8}:153 \qquad (6)$$

Mit Halbieren von $\angle AOE$ beginnt die Prozedur von vorne:

$$\overline{EO}:\overline{AO} = \overline{EF}:\overline{AF}$$

$$\left(\overline{AO}+\overline{EO}\right):\overline{AO} = \overline{AE}:\overline{AF}$$

$$\left(\overline{AO}+\overline{EO}\right):\overline{AE}=\overline{AO}:\overline{AF}$$

Wegen (5) und (6) erhält man: $\overline{AO}:\overline{AF}>2334\frac{1}{4}:153$ (7)

Dann: $$\overline{AO}^2:\overline{AF}^2>5448723\frac{1}{16}:153^2$$

$$\overline{OF}^2:\overline{AF}^2>5472132\frac{1}{16}:153^2$$

$$\overline{OF}:\overline{AF}>2339\frac{1}{4}:153 \qquad (8)$$

Nun halbiert man $\angle AOF$ und erhält:

$$\overline{FO}:\overline{AO}=\overline{FG}:\overline{AG}$$

$$\left(\overline{AO}+\overline{FO}\right):\overline{AO}=\overline{AF}:\overline{AG}$$

$$\left(\overline{AO}+\overline{FO}\right):\overline{AF}=\overline{AO}:\overline{AG}$$

Wegen (7) und (8) erhält man nun: $\overline{AO}:\overline{AG}>4673\frac{1}{2}:153$ (9)

In der Skizze erkennt man, daß $\overline{AG}=\overline{AH}$, weshalb $\angle GOH$ ein Achtel von $\angle AOC$ sein muß. Daraus folgt, daß wir das umbeschriebene 96-Eck des Archimedes, dessen eine Seite also *GH* ist, nachvollzogen haben.

Wenn man (9) erweitert, erhält man:

$$\left(2\cdot\overline{AO}\right):\left(96\cdot 2\cdot\overline{AG}\right)>9347:\left(153\cdot 96\cdot 2\right).$$

$2\cdot\overline{AG}$ ist aber gerade $\overline{HG}$, d.h. eine Seite des 96-Ecks, folglich ist $96\cdot 2\cdot\overline{AG}$ genau der Umfang U_{96} des 96-Ecks und darüber hinaus $2\cdot\overline{AO}$ gerade der Durchmesser des Einheitskreises, sodaß man schreiben kann:

$$2r:2r\pi>2r:U_{96_{\text{umbeschrieben}}}>9347:29376$$

Vertauschen der Glieder dreht auch des Ungleichheitszeichen um:

$$2r\pi:2r=\pi:1<U_{96_{\text{umbeschrieben}}}:2<29376:9347=3\frac{1335}{9347}$$

Da $3\frac{1335}{9347}<3\frac{1335}{9345}=3\frac{1}{7}$ ist sicherlich $\pi<\frac{U_{96_{\text{umbeschrieben}}}}{2}<3\frac{1}{7}$

Es ist also bewiesen, daß $\pi<3\frac{1}{7}$ sein muß.

Die untere Grenze erhält man durch Einschreiben von regelmäßigen Polygonen. Die Skizze verdeutlicht abermals:

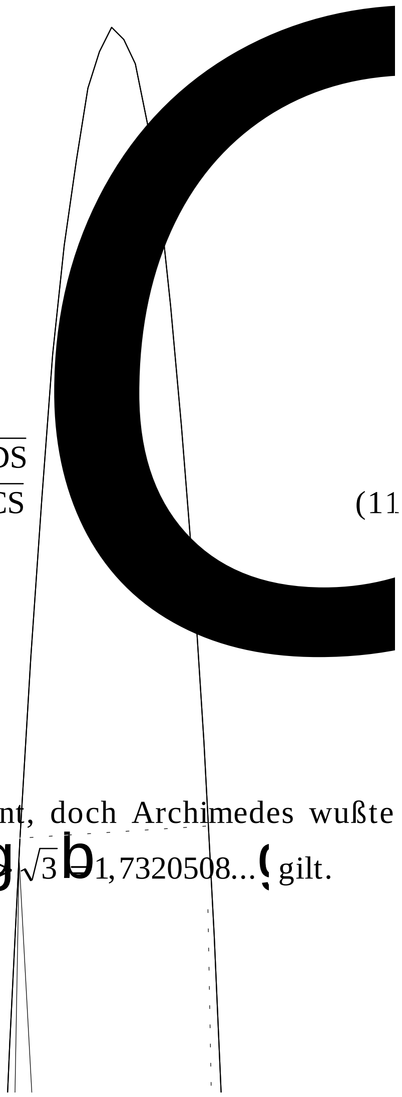
Dem Einheitskreis mit Mittelpunkt *O* wird ein Sechseck eingeschrieben, dessen 4 Eckpunkte *A*, *B* und *C* auf dem Halbkreis aufgetragen sind. Da das Sechseck wieder aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht, gilt $\overline{BC} = \overline{BO} = \overline{AO} = r = 1$. Im Thaleskreis muß $\angle ACB$ ein rechter Winkel sein, sodaß

$$\overline{AC}^2 = \left(\overline{AO} + \overline{BO}\right)^2 - \overline{BC}^2 = \left(2\overline{BC}\right)^2 - \overline{BC}^2 = 3 \cdot \overline{BC}^2$$

und damit $\overline{AC} = \sqrt{3}$.

Folglich gilt: $$\overline{AC} : \overline{BC} = \sqrt{3} : 1 < 1351 : 780\,^{*} \qquad (10)$$

AD halbiert $\angle BAC$ und hat mit *BC* den Schnittpunkt S, sodaß die beiden Dreiecke *ABD* und *BDS* entstehen. $\angle BAD$ ist natürlich gleich $\angle CAD$, da *AD* nach Voraussetzung $\angle BAC$ halbiert, $\angle CAD$ ist aber der (gleich große) Normalwinkel zu $\angle DBS$, woraus folgt, daß $\angle BAD$ gleich $\angle DBS$ ist. Weiters haben beide Dreiecke einen rechten Winkel, sodaß sie ähnlich sein müssen. Daraus lassen sich folgende Proportionen ableiten:



$$\begin{aligned} \overline{AD} : \overline{BD} &= \overline{BD} : \overline{DS} \\ &= \overline{AC} : \overline{CS} \end{aligned} \qquad (11)$$

Gemäß dem Strahlensatz gilt: $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{CS} : \overline{BS}$

Vertauschen der Innenglieder bringt: $\overline{AC} : \overline{CS} = \overline{AB} : \overline{BS}$

---

* Der Ursprung dieser Näherung ist unbekannt, doch Archimedes wußte offensichtlich schon, daß $\frac{1351}{780}\left(=1{,}7320512\ldots\right) > \sqrt{3}\left(=1{,}7320508\ldots\right)$ gilt.

Folglich gilt: $\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AB}:\overline{BS}$ (12)

Addition von (11) und (12) ergibt $=\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right):\left(\overline{CS}+\overline{BS}\right)$

$$=\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right):\overline{BC} \qquad (13)$$

Nach Voraussetzung gilt: $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1=1560:780$

Addiert man (10) hinzu, so folgt: $\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right):\overline{BC}<2911:780$

Gemäß (13) gilt daher: $\overline{AD}:\overline{BD}<2911:780$ (14)

Quadrieren und „Erweitern“ bewirken:

$$\left(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2\right):\overline{BD}^2<\left(2911^2+780^2\right):780^2$$

Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$\overline{AB}^2:\overline{BD}^2<\left(8473921+608400\right):780^2$$

Und Wurzelziehen: $\overline{AB}:\overline{BD}<\sqrt{9082321}:780$

Oder vereinfacht angeschrieben: $\overline{AB}:\overline{BD}<3013\frac{3}{4}$ (15)

$\angle BAD$ wird nun von *AE* halbiert, sodaß sich die Seitenzahl des eingeschriebenen regelmäßigen Polygons zum 12-Eck verdoppelt. Obigem Schema folgend erhält man:

$$\overline{AE}:\overline{BE}=\left(\overline{AB}+\overline{AD}\right):\overline{BD}$$

Addition von (14) und (15) ergibt: $\left(\overline{AB}+\overline{AD}\right):\overline{BD}<5924\frac{3}{4}:780$

Daraus folgt: $\overline{AE}:\overline{BE}<5924\frac{3}{4}:780$

Erweitern der rechten Seite mit $\frac{4}{13}$ und Zusammenfassen ergibt:

$$\overline{AE}:\overline{BE}<1823:240 \qquad (16)$$

Quadrieren und anschließende Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes ergeben:

$$\overline{AB}^2:\overline{BE}^2<\left(1823^2+240^2\right):240^2$$

$$\overline{AB}:\overline{BE}<\sqrt{3380929}:240<1838\frac{9}{11}:240 \qquad (17)$$

Neuerlich wird halbiert und durch Verwendung von (16) und (17) gelangt man zu:

$$\overline{AF}:\overline{BF}=\left(\overline{AB}+\overline{AE}\right):\overline{BE}<3611\frac{9}{11}:240$$

Aus dem Erweitern mit $\frac{11}{40}$ folgt: $\overline{AF}:\overline{BF}<1007:66$ (18)

Quadrieren: $\overline{AF}^2:\overline{BF}^2<1007^2:66^2$

Und „Erweitern“: $\left(\overline{AF}^2 + \overline{BF}^2\right) : \overline{BF}^2 < \left(1007^2 + 66^2\right) : 66^2$

Satz von Pythagoras: $\overline{AB}^2 : \overline{BF}^2 < 1018405 : 66^2$

Und Radizieren: $\overline{AB} : \overline{BF} < 1009\frac{1}{6} : 66$ (19)

Zuletzt geht man zum 96-Eck über, indem man nochmals halbiert:
Addition von (18) und (19) und übliches Umformen ergeben:

$$\overline{AG} : \overline{BG} = \left(\overline{AB} + \overline{AF}\right) : \overline{BF} < 2016\frac{1}{6} : 66$$

Quadrieren und die Anwendung des Satzes v on Pythagoras führen zu:

$$\overline{AB}^2 : \overline{BG}^2 < \left(2016\frac{1}{6}^2 + 66^2\right) : 66^2$$

Vereinfachen und Umdrehen der Glieder erzeugt: $\overline{BG} : \overline{AB} > 66 : 2017\frac{1}{4}$

Da $\overline{BG}$ eine Seite des 96-Ecks ist, kann man folgende Proportion aufstellen:

$$U_{96_{\text{eingeschrieben}}} : \overline{AB} > (96 \cdot 66) : 2017\frac{1}{4} = 6336 : 2017\frac{1}{4} (= 3{,}140909\ldots) > 3\frac{10}{71} (= 3{,}140845\ldots)$$

Damit ist bewiesen, daß das Verhältnis $\pi = U : D_{\text{urchmesser}}$ des eingeschriebenen 96-Ecks kleiner ist als $3\frac{10}{71}$.

Führt man dieses Ergebnis nun mit dem Resultat aus dem umgeschriebenen 96-Eck zusammen, so erhält man die berühmte Ungleichung des Archimedes:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Appollonius von Perga (262-190 v.Chr.) soll den Wert $\pi \approx 3{,}1416$ gefunden haben, welcher später auch immer wieder in Indien auftaucht und mit jenem des Ptolemäus übereinstimmt. Seine Berechnungsmethode ist jedoch unbekannt. *(vgl. BOYER 1968, S.158)*

Heron von Alexandria (um 100 n.Chr.) gelang es angeblich, die Methode des Archimedes zu verfeinern, sodaß er zur folgenden Approximation gelangte: $\frac{35312}{67441} < \frac{\pi}{6} < \frac{32647}{62351}$. Es ist aber nicht vollständig geklärt, ob dieser Ausdruck wirklich von ihm stammt. *(vgl. EHRENFRIED HOFMANN 1953, S.38)*

Der griechische Astronom **Claudius Ptolemäus** (2. Jhdt. n.Chr.) nützte die Vorarbeit des Archimedes und setzte dessen Methode bis zum 720-Eck fort. Damit erreichte er für π die Näherung $\pi \approx \frac{377}{120} = 3{,}141\dot{6}$.

3. Mittelalter

3.1. China

Hier begnügte man sich lange Zeit mit dem Wert 3 als Approximation für π, die im „Heiligen Buch der Rechenkunst“ „Chou-pei-suan-ching“ festgehalten wurde. *(vgl. BAUER 1928, S.4)*

Liu Hui fand im Jahre 264 n.Chr. mit Hilfe eines 192-Ecks und der bewährten Methode des Archimedes, daß die Ungleichung $3{,}141024 < \pi < 3{,}142704$ gilt. Als er ein 3072-Eck benützte, approximierte er π mit dem Wert 3,14159. *(vgl. WIESENBAUER 1976, S.302)*

Der Astronom **Tsu Chu'ung-Chi** (430-501) und sein Sohn **Tsu Keng-Chi** fanden den Ausdruck $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ und die Näherung $\frac{355}{113} \approx 3{,}14159292$, die immerhin 6 richtige Nachkommastellen aufweist und der „beste“ Bruch ist, dessen Faktoren kleiner als $\frac{103993}{33102} \approx 3{,}1415926530$ sind. Über den Ursprung des recht einfachen Bruches gibt es nur Vermutungen, die besagen, daß Tsu einfach die bekannten Brüche von Ptolemäus und Archimedes verwendet hat und die Differenz der Zähler und Nenner bildete: $\pi = \frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$ *(vgl. WELLS 1991, S.49)*

3.2. Indien

Auch der indische Mathematiker **Brahmagupta** (geboren 598 n.Chr.) fand den Wert $\pi = \sqrt{10}$, indem er die Summe der Seitenlängen von 12-, 24-, 48- und 96-seitigen Polygonen, die er einem Kreis mit dem Durchmesser 10 E einschrieb, berechnete. Diese ergeben $\sqrt{965}, \sqrt{981}, \sqrt{986}$ und $\sqrt{987}$. Weiters nahm er an, daß dies schließlich zu $\sqrt{1000}$, dem Kreisumfang, führen würde. Für π ergäbe sich dann der Wert $\frac{\sqrt{1000}}{10} = \sqrt{10} \approx 3{,}1623$ *(vgl. CASTELLANOS 1988, S.68)*

Um 510 n.Chr. gab **Aryabhatiya** folgende Regel zur Bestimmung von π an: „Addiere 4 zu 100, multipliziere mit 8, und addiere 62 000. Das

Resultat ist der ungefähre Wert des Umfanges eines Kreises mit dem Durchmesser 20 000.“ *(vgl. KAISER 1984, S.146)* π wird also mit $\frac{3927}{1250} = 3{,}1416$ approximiert, einem Wert, der auch im Paulisha Siddhanta aufscheint und mit jenem des Ptolemäus (siehe Seite 17) übereinstimmt. Bei Aryabhatiya findet man auch eine Aufgabe, die einem Kreis mit dem Radius 3438 E einen Umfang von 21600 E zuordnet, was für π den Wert $\approx 3{,}14136$ bedeutet. Im „Bahmasphuta Siddhanta“ wird der Radius bei identischem Umfang mit 3270 E angegeben, was für $\pi \approx 3{,}30275$ ergibt. *(vgl. BOYER 1968, S.241)* Schließlich verwendet auch **Bhaskara** um 1150 diesen Wert als einen exakten für π, während er den Bruch $\frac{22}{7}$, den Archimedes als erster berechnete, als grobe Näherung angibt.

3.3. Arabien

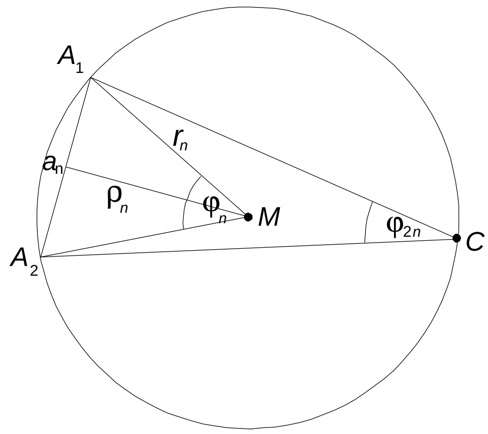
Ibn Alhaitam (958-1038) behandelte selbständig die Quadratur des Kreises. *(vgl. BAUER 1928, S.13f.)*
Dem Perser **Jemshid Al-Kashi** gelang es um 1430 n.Chr. sechzehn Dezimalstellen von π korrekt zu berechnen. *(vgl. WIESENBAUER 1976, S.302)*
Den Arabern verdanken wir aber in erster Linie die Überlieferung der Ergebnisse von griechischen und indischen Mathematikern.

3.4. Mitteleuropa

Leonardo von Pisa (1170-1240?), genannt **Fibonacci**, gelang es lediglich drei korrekte Dezimalstellen von π zu ermitteln.

3.4.1. Nikolaus von Kues (1401-1464)

(vgl. PECH 1989, S.10f.) Dieser Kardinal und zu seiner Zeit bedeutende Gelehrte wird in der Literatur oft mit seinem latinisierten Namen Cusanus erwähnt. Anfangs betrachtete er 3,1423 als den exakten Wert von π, doch die folgende Methode erlaubte ihm, π beliebig genau zu approximieren.
Einem Kreis wird ein regelmäßiges n-Eck eingeschrieben, sodaß dessen Umfang 1 ist.



Aus nebenstehender Skizze ersieht man: ρ_n bezeichnet den Inkreisradius, r_n den Umkreisradius, a_n die Seitenlänge des regelmäßigen n-Ecks (wobei nach Voraussetzung gilt: $n \cdot a_n = 1$), *M* den Mittelpunkt des Umkreises und φ_n den Zentriwinkel A_1MA_2 des n-Ecks, der sich durch $\frac{360°}{n}$ berechnen läßt.

Gemäß dem Peripheriewinkelsatz gilt: $\varphi_{2n} = \frac{\varphi_n}{2}$ (1)

φ_{2n} ist also der Zentriwinkel des 2n-Ecks, womit der Schritt vom n-Eck zum 2n-Eck vollzogen wäre. Im 2n-Eck gilt aber noch immer, daß $a_{2n} = a_n$, weshalb der Umfang nun 2 wäre. Um den Umfang wieder auf 1 zu reduzieren, muß man ΔA_1A_2C im Verhältnis 2:1 verkleinern.

Folglich ergibt sich: $$\rho_{2n} = \frac{r_n + \rho_n}{2} \qquad (2)$$

In ΔA_1A_2M gilt auf Grund des pythagoreischen Lehrsatzes:

$$\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \rho_n^{\ 2} = r_n^{\ 2} \qquad (3)$$

In ΔA_1A_2C gilt aus demselben Grund: $\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + (\rho_n + r_n)^2 = (2r_{2n})^2$ (4)

$\left(\frac{a_n}{2}\right)^2$ kann man sich nun durch (3) ausdrücken, in (4) einsetzen:

$$r_n^{\ 2} - \rho_n^{\ 2} + (\rho_n + r_n)^2 = (2r_{2n})^2$$

Und ausmultiplizieren: $r_n^{\ 2} - \rho_n^{\ 2} + \rho_n^{\ 2} + 2\rho_n r_n + r_n^{\ 2} = 4r_{2n}^{\ 2}$

$r_n \frac{(r_n + \rho_n)}{2} = r_{2n}^{\ 2}$ ist entsprechend (2) gleichbedeutend mit $r_n\rho_{2n} = r_{2n}^{\ 2}$

Schließlich erhält man: $r_{2n} = \sqrt{r_n\rho_{2n}}$. Die zweite Folge (2) lautet: $\rho_{2n} = \frac{r_n + \rho_n}{2}$

Somit haben wir zwei gekoppelte rekursive Folgen erhalten, in die man beispielsweise die Werte für ein Quadrat einsetzen kann. Auf diese Weise erhalten wir die beiden Folgen:

$\langle r_{2n} \rangle = \langle 0{,}1768; 0{,}1633; 0{,}1620; 0{,}1594; 0{,}1592; \ldots \rangle$

$\langle \rho_{2n} \rangle = \langle 0{,}125; 0{,}1509; 0{,}1571; 0{,}1586; 0{,}1590; \ldots \rangle$

Beide Folgen konvergieren gegen 0,159115..., was einen Näherungswert für $\frac{1}{2\pi}$ darstellt, da der Inkreis- und Umkreisradius des n-Ecks jenem des Kreises immer näher kommen. Da nach Voraussetzung $2r\pi = 1$ ist, ergibt sich für den Radius $r = \frac{1}{2\pi}$, ein Wert der von den obenstehenden Folgen beliebig genau angenähert wird.

4. Neuzeit

Adriaen Metius entdeckte zufällig die Näherung $\frac{355}{113}$, als er das arithmetische Mittel von Zähler und Nenner der beiden Näherungen $\frac{377}{120}$ und $\frac{333}{106}$, die auf Berechnungen seines Vaters beruhten, bildete. Diesen Wert hatte aber schon mehr als 1000 Jahre vor ihm Tsu Ch'ung-Chi gefunden.

Der deutsche Astronom **Georg Joachim von Lauchen**, genannt **Rhäticus** (1514-1576), da er in Rätien, dem heutigen schweizer Kanton Graubünden geboren war, erstellte fünfzehnstellige Tafeln von trigonometrischen Funktionen, durch die erstaunlich genaue Werte für π berechnet werden können.

Wie bei Eulers Berechnungsmethode noch gezeigt wird gilt, daß $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$, d.h. $\sin\alpha\approx\alpha$ für sehr kleine α. Da ein Halbkreis einen Winkel von $180°=10\,800'=648\,000''$ überstreicht, kann man den von Rhäticus für $\sin 10''$ angegebenen Wert 0,000048481368092 mit 64 800 multiplizieren und erhält sodann 3,1415926523, was auf 8 Dezimalstellen mit dem tatsächlichen Wert übereinstimmt. *(vgl. CASTELLANOS 1988, S.68)*

Tycho de Brahe (1546-1601), ein dänischer Astronom, nahm für π den Wert $\frac{88}{\sqrt{785}}\approx 3{,}14085$ an.

Im Jahre 1592 stellte **François Viète**, lateinisch **Vieta** genannt, der „Vater" der modernen Algebra, erstmals eine geschlossene Formel vor, die sich leicht aus einem unendlichen Produkt, das Leonard Euler (siehe dort) rund 150 Jahre später fand, ableiten läßt.

4.1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

1673 fand G.W. Leibniz die einfache, aber nur sehr langsam konvergierende Formel $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-+\ldots$, die sich mit Hilfe der Potenzreihe des Arcustangens ableiten läßt.

Um die Potenzreihe von $y = \arctan x$ zu bilden differenziert man zuerst $\tan y = x$ implizit:

$$y' \cdot \frac{d \tan y}{dy} = \frac{dx}{dx}$$

$$y' \cdot \frac{d \dfrac{\sin y}{\cos y}}{dy} = 1$$

$$\frac{\cos y \cdot y' \cdot \cos y - (-\sin y) \cdot y' \cdot \sin y}{\cos^2 y} = 1$$

$$\frac{y' \cdot \cos^2 y + y' \cdot \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1$$

$$y' + y' \cdot \tan^2 y = 1$$

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\tan[\arctan x]\right)^2}$$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - \left(-x^2\right)}$$

y' läßt sich nun gemäß der Formel für unendliche geometrische Reihen $s_\infty = \dfrac{1}{1-q}$ in eine Potenzreihe verwandeln. *q* ist dann $-x^2$, sodaß sich folgende Potenzreihe ergibt:

$$y' = 1 + \left(-x^2\right) + \left(-x^2\right)^2 + \left(-x^2\right)^3 + \left(-x^2\right)^4 + \left(-x^2\right)^5 + \ldots$$

$$y' = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + - \ldots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Integriert man diesen Ausdruck gliedweise, so ergibt sich:

$$\arctan x = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + - \ldots$$

Setzt man nun $x = 1$, so erhält man wegen $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ Leibniz' Ausdruck:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \ldots$$

Um die schlechte Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, kann man kleinere Werte für *x* einsetzen, sodaß man beispielsweise aus $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ die schon um einiges schneller konvergierende Reihe

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

erhält.

4.2. John Wallis (1616-1703)

Er fand den Ausdruck $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots$, der sich wie folgt ableiten läßt. *(vgl. MÖWALD 1993, S.117f.)*

Zuerst betrachtet man das Integral $\int \sin^n x\,dx$, wobei $n\in\mathbf{Z}$ ist. $\sin^n x$ kann man nun durch $\sin^{n-1}x\cdot\sin x$ ersetzen und partiell integrieren:

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx &= \int \sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx = \\ &= \sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)-\int (n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\cdot(-\cos x)\,dx = \\ &= -\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)\,dx = \\ &= -\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int \sin^n x\,dx =\end{aligned}$$

Da auf der rechten Seite noch einmal der Term $\int \sin^n x\,dx$ auftritt, kann man ihn auf die linke Seite bringen und anschließend den ganzen Ausdruck vereinfachen:

$$\int \sin^n x\,dx+(n-1)\int \sin^n x\,dx = -\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx$$

$$\int \sin^n x\,dx+n\cdot\int \sin^n x\,dx-\int \sin^n x\,dx = -\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx$$

$$\int \sin^n x\,dx = \frac{-\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx}{n}$$

$$\int \sin^n x\,dx = \frac{-\cos x\cdot\sin^{n-1}x}{n}+\frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$

Diese Rekursionsformel bildet Wallis' Grundlage der Approximation von π.

Weiters bezieht er sich auf folgende Beziehung, die für $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ und $k\ge 1$ gültig ist:

$$\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x\le\sin^{2k-1}x \qquad (1)$$

Sie läßt sich damit begründen, daß alle Funktionswerte der Sinus-Funktion im Intervall [0;1] liegen und daher zu einer positiven Potenz erhoben kleiner werden. Je größer diese Potenz ist, umso kleiner wird daher auch der potenzierte Funktionswert, woraus sich obenstehende Ungleichung ergibt.

Setzt man nun die Grenzen der Integration mit 0 und $\frac{\pi}{2}$ fest, so kann man folgendermaßen umformen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{-\cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin^{n-1}\frac{\pi}{2}}{n} - \frac{-\cos 0 \cdot \sin^{n-1} 0}{n} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$$

Zuerst setzt man gemäß (1) $n = 2k$, sodaß man vereinfachen kann:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx = \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-2} x \, dx =$$

$$= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-4} x \, dx =$$

$$= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-5}{2k-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2-2} x \, dx =$$

$$= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-5}{2k-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx =$$

$$= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-5}{2k-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

Schließlich erhält man folgendes unendliches Produkt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-5}{2k-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Setzt man gemäß (1) nun $n = 2k+1$, so kann man wieder vereinfachen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2k}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx =$$

$$= \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-3} x\,dx =$$

$$= \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \tag{3}$$

$$= \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot(0-[-1]) =$$

$$= \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}$$

Schließlich setzt man (2) und (3) in (1) ein und erhält:

$$\begin{gathered}\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)} \le \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)} \\ 1 \le (2k+1)\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{2k+1}{2k}\end{gathered} \tag{4}$$

Beim Grenzübergang von *k* nach ∞ wird der rechte Term 1, da

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k} = 1$$

ist.

Für (4) ergibt sich somit:

$$\lim_{k\to\infty} 1 \le (2k+1)\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2} \le 1$$

Das bedeutet weiters, daß der Ausdruck in der Mitte gegen 1 strebt:

$$\lim_{k\to\infty}(2k+1)\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$

Isoliert man π, so erhält man die Produktdarstellung von Wallis:

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2\cdot\frac{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2k)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots(2k-1)^2\cdot(2k+1)^2} = 2\cdot\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots\right)$$

Ein erbitterter Gegner von Wallis’ war der englische Philosoph Thomas Hobbes (1588-1679), der sich 25 Jahre lang mit Wallis vornehmlich in Form von Briefen bekriegte, in denen sie ihre neuesten Theorien und Berechnungen festhielten und versuchten, diejenigen des „Gegners“ zu widerlegen.

Um 1700 herum war Jacob Marcelis der Meinung, daß es ihm gelungen sei, den Kreis zu quadrieren, und damit den exakten Wert für π zu bestimmen. Diesen gab er mit $3\frac{1\,008\,449\,087\,377\,541\,679\,894\,282\,184\,894}{6\,997\,183\,637\,540\,819\,440\,035\,239\,271\,702}$ an. *(vgl. Wells 1990, S.52)*

4.3. John Machin (1680-1751)

1706 gelang John Machin ein Geniestreich: Auf Grund der folgenden sehr effektiven Berechnungsmethode konnte er 100 korrekte Dezimalstellen erzielen. *(vgl. PEITGEN 1992, S.177)*

Eine weitere Möglichkeit, die Konvergenz der Arcustangens-Reihen zu verbessern, besteht nämlich darin, unter Verwendung des Additionstheorems $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$ folgendermaßen vorzugehen:

Setzt man willkürlich $\tan y := \frac{1}{5}$, so berechnet man leicht nach obiger Beziehung

$$\tan 2y = \frac{2\tan y}{1-\tan^2 y} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

und weiters

$$\tan 4y = \frac{2\tan 2y}{1-\tan^2 2y} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \qquad (1)$$

Außerdem erhält man unter Berücksichtigung von $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\tan\left(4y-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4y - 1}{1+\tan 4y} = \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \frac{1}{239}$$

aus selbiger Beziehung.

Unter Anwendung des Arcustangens erhält man daraus:

$$4y - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

Schließlich gelangt man mit Hilfe von (1) zu:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Dieser Ausdruck stellt bereits eine sehr effiziente Berechnungsmethode dar, wenn man dabei die Potenzreihe des Arcustangens (siehe Seite 23) benützt.

Erst 1958 entdeckte G.F. FREEMAN *(Math. Gazette 42, S.285)* folgende noch schneller konvergierende Formel *(zitiert nach KOECHER 1987, S.162)*

$$\frac{\pi}{4}=8\arctan\frac{1}{10}-4\arctan\frac{1}{515}-\arctan\frac{1}{239}$$

Genauso gut eignet sich auch die Potenzreihe (Taylor-Reihe) des Arcussinus zur Approximation von π: *(vgl. BRONŠTEJN u.a. 1991, S.372)*

$$\begin{aligned}
&y=\arcsin x\\
&\sin y=x\\
&y'\cdot\frac{d\sin y}{dy}=\frac{dx}{dx}\\
&y'\cdot\cos y=1\\
&y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\\
&y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck läßt sich nun gemäß dem binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\ldots+\binom{n}{n}a^0b^n$$

in die folgende unendliche Potenzreihe verwandeln:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^2\binom{-\frac{1}{2}}{s}x^{2s}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\ldots$$

Durch gliedweises Integrieren gelangt man zu:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^2\binom{-\frac{1}{2}}{s}x^{2s}dx=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^2\binom{-\frac{1}{2}}{s}\frac{x^{2s+1}}{2s+1}$$

Man erhält schließlich:

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$$

Nun kann man wieder beliebige Werte für *x* einsetzen und erhält so entsprechende Reihen zur Approximation von π. Für $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ ergibt sich:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot2^7}+\ldots$$

4.4. Leonard Euler (1707-1783)

Euler war der erste, der für das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser eines Kreises den griechischen Buchstaben für p, nämlich π, verwendete. Der Grund für diese Bezeichnung dürfte sein, daß der Umkreis griechisch „periphereia“ heißt und der Umfang des Einheitskreises genau π ist. (KAISER gibt für die „Erfinder“ des Symbols π zwei englische Mathematiker namens William Oughtred und Issac Barrow an, die den Umfang des Kreises mit π bezeichneten. Erst der Schriftsteller William Jones soll 1706 π als Symbol in unserem heutigen Sinn verwendet haben.)

Euler fand die Beziehung $e^{i\pi}+1=0$, die eine Voraussetzung für Lindemanns Beweis der Transzendenz von π ist. Auch die folgende stammt von ihm: $\frac{1}{1^{26}}+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+...=\frac{2^{24}\cdot 76\,977\,927\cdot\pi^{26}}{27!}$ und ein unendliches Produkt, in dem nur Primzahlen auftreten: *(vgl. WELLS 1990, S. 54)*

$$\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot...$$

Darüber hinaus fand er auch die Beziehung $\frac{\sin\varphi}{\varphi}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdot\cos\frac{\varphi}{8}\cdot...$, mit der sich π approximieren läßt, und durch die man bei der im folgenden ausgeführten Vereinfachung zu Vietas Produktdarstellung von π gelangt.

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \qquad (1)$$

denn *(vgl. BRONŠTEJN 1991, S.182)*:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)\right] \qquad (2)$$

Das heißt:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}=\frac{2}{\varphi}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{2}{\varphi}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]=\frac{1}{\varphi}\sin\varphi$$

entsprechend (1) gilt weiter: $\frac{\sin\varphi}{\varphi}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{4}}{\frac{\varphi}{4}}$, was sich wieder mit (2) beweisen läßt. Da sich diese Umformung beliebig fortsetzen läßt, erhält man schließlich einen Ausdruck von der Form:

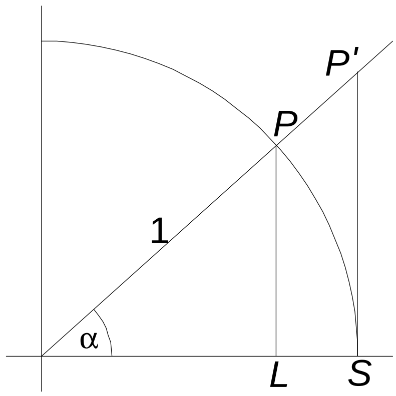
$$\frac{\sin\varphi}{\varphi}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} \tag{3}$$

Der Term $\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}$ konvergiert gegen 1, sodaß man zuletzt aus (3) Eulers Ausdruck erhält:

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdot\cos\frac{\varphi}{8}\cdot\ldots \tag{4}$$

(vgl. CASTELLANOS 1988, S. 68ff.)

Die Konvergenz des Ausdrucks $\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}$ läßt sich folgendermaßen beweisen:



Wie in der Skizze erkennbar gilt folgende Ungleichung:

$$\overline{LP}<\overset{\frown}{PS}<\overline{P'S}$$

Die Bogenlänge kann man durch den Winkel im Bogenmaß, und die beiden Strecken durch die entsprechenden Winkelfunktionen im Einheitskreis angeben:

$$\overline{LP}<\overset{\frown}{PS}<\overline{P'S}$$

$$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha \quad \text{für} \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Das ist äquivalent: $\sin\alpha<\alpha<\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Division durch $\sin\alpha$ ergibt: $1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}$

Nun läßt man $\alpha\to 0$ gehen und erhält $\lim\limits_{\alpha\to 0} 1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}$

Da $\lim\limits_{a\to 0}\cos\alpha=1$ kann man vereinfachen: $\lim\limits_{\alpha\to 0} 1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<1$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$ ist somit bewiesen. Da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\varphi}{\infty}=0$ ist, bedeutet das weiters, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}=1$ sein muß.

Setzt man nun in (4) $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so erhält man $\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ldots$ (5)

Gemäß der Beziehung $\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}$ kann man den Ausdruck umformen:

Da $\cos\frac{\pi}{2}=0$ gilt: $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+0)}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

Weiters $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

Und auch: $\cos\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

Ersetzt man die entsprechenden Terme in (5), so erhält man den Ausdruck, den schon François Viète im Jahre 1593 fand:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots$$

Die Konvergenz dieses Ausdrucks konnte aber erst F. Rudio im Jahre 1891 beweisen.

4.5. Weitere Berechnungen

Im 16. Jahrhundert berechnete **Ludolph van Ceulen** (1540-1610) zuerst 15, dann 20, später 32 und schließlich sogar 35 Dezimalstellen mit Hilfe der Methode des Archimedes, die er auf ein $15\cdot 2^{24}$-Eck, ein $15\cdot 2^{37}$-Eck bzw. ein $4\cdot 2^{60}$-Eck anwandte. Sein Werk wurde gleich zweifach gewürdigt: Erstens ließ seine Witwe das Ergebnis seiner Berechnungen in den Grabstein ihres Gatten einmeißeln, und zweitens erhielt π die Bezeichnung „Ludolph'sche Zahl". *(vgl. EHRENFRIED HOFMANN 1953, S.129)*

Der Niederländer van Roomen errechnete um 1600 auf der Grundlage eines $15\cdot 2^{25}\left(=503\,316\,480\right)$-Ecks fünfzehn Dezimalstellen von π.

Snell(ius) und **Huygens** verfeinerten schon bekannte Verfahren vor allem mit Hilfe der weiterentwickelten Trigonometrie. 1621 fand Snellius durch eine Kombination von ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecken den Ausdruck $\frac{3\sin t}{2+\cos t}<t<\frac{1}{3}(\tan t+2\sin t)$, in den man für *t* einen beliebigen Winkel, der sich durch π ausdrücken läßt, einsetzen kann, sodaß man durch eine entsprechend genaue Berechnung der

Winkelfunktionen beliebig enge Grenzen für π finden kann. *(vgl. EHRENFRIED HOFMANN 1953, S.129)*

Newton gelang es 1666 die ersten 16 Stellen von π zu berechnen, indem er die ersten 20 Summanden in

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \ldots \right)$$

berücksichtigte.

Johann Heinrich Lambert gelang es im Jahre 1761, die Irrationalität von π zu beweisen. *(vgl. BOYER 1968, S.505)*

Zuerst zeigte er, daß $\tan x$ nicht rational sein kann, wenn $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ist. Daraus folgerte er, daß x nicht rational sein kann, wenn $\tan x$ rational ist, wie dies in dem Ausdruck $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ der Fall ist. Nach dem Beweis dieses Ausdrucks schloß Lambert, daß $\frac{\pi}{4}$ und damit auch π nicht rational sein können.

Mit Hilfe von Kettenbrüchen konnte er auch die besten Approximationen in Form von Brüchen berechnen. Dazu zählen beispielsweise $\frac{109\,993}{33102} \approx 3{,}323$ oder noch genauer $\frac{1\,019\,514\,486\,099\,146}{324\,521\,540\,032\,945} \approx 3{,}141595653591$

Johann Dase (1824-1861), der als Rechengenie bekannt war, berechnete in weniger als zwei Monaten 200 Dezimalstellen von π. Auf Empfehlung von C.F. Gauß fand er später eine Anstellung, bei der er Tafeln für Logarithmen- und Hyperbelfunktionen berechnete.

Im Jahre 1853 fand **William Shanks** mit der selben Formel, wie Machin sie benützt hatte, 707 Stellen der Dezimalbruchentwicklung von π. Später fand man aber heraus, daß er sich ab der 528. Stelle verrechnet hatte. Shanks widmete sich aber auch der hochgenauen Berechnung von Logarithmen, von denen er bis zu 137 Dezimalstellen fand, und er bestimmte den Wert von 2^{721}.

In jener Zeit wurde erstmals auch die Ziffernfolge von π genauer untersucht. Dabei fiel **Auguste de Morgan** auf, daß die Ziffer 7 nur 44 mal im Gegensatz zum erwarteten Mittelwert von etwa 71 mal in Shanks' für π errechnetem Wert auftrat, was an dessen Rechenfehler lag. *(vgl. WELLS 1990, S. 51)*

1882 zeigte **Lindemann** (1852-1939) mit seinem Beweis der Transzendenz von π, daß π keine Lösung einer algebraischen Gleichung, das heißt einer Gleichung mit reellen Koeffizienten und einer endlichen Anzahl von Gliedern ist. *(vgl. BOYER 1968, S.603)*
Den folgenden nur skizzierten Beweis veröffentlichte er in dem Artikel „Über die Zahl π“ in den „Mathematischen Annalen“ in München.
Zuerst bewies Lindemann, daß die Lösung von $e^{ix}+1=0$ nicht algebraisch sein kann. Er wußte aber, daß π dieser Gleichung genügte (das hatte schon Newton bewiesen), woraus er folgerte, daß π keine algebraische Zahl sein kann.

5. Das 20. Jahrhundert

1945 wies **Ferguson** den oben schon erwähnten Fehler in Shanks' Berechnungen mit Hilfe eines „Tischrechners" nach. Die Nachkriegszeit wurde also auch zum Computerzeitalter, das die immer genauere Berechnung von π ermöglichte.

Vier Jahre später rechnete **ENIAC** neunzig Stunden lang an den ersten 2037 Stellen von π, ohne dabei einen Fehler zu machen.

Am 29. Juli 1961 wurden auf einer IBM 7090 in New York 100 265 Dezimalstellen von π berechnet. Die Rechenzeit betrug nur noch 8 Stunden.

1967 berechnete der französische Computer **CDC 6600** nicht weniger als 500 000 Stellen von π.

1988 waren es bereits $2^{24}(=16\,777\,216)$ Stellen, die **Yoshiaki Tamura** und **Tasumasa Kanada** mit einem Computer berechneten. *(vgl. WELLS 1990, S.54f.)*

Ihrem Algorithmus liegen Untersuchungen von Gauß zum arithmetischen und geometrischen Mittel zugrunde, was sie schließlich zu folgender Schleife führte:

	Die Startwerte sind:
1: $Y := A$ 2: $A := \frac{A+B}{2}$ 3: $B := \sqrt{B \cdot Y}$ 4: $C := C - X(A-Y)^2$ 5: $X := 2X$	$A = X = 1$ $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $C = \frac{1}{4}$

Durchläuft man die Schritte 1 bis 5 nacheinander, so ergibt sich nach jedem Durchlauf die immer bessere Approximation $\pi \approx \frac{(A+B)^2}{4C}$.

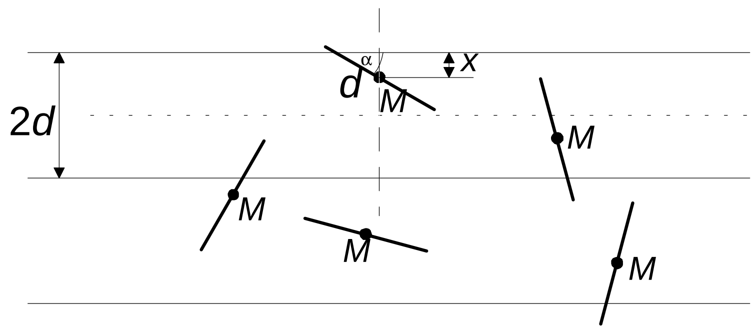
1986 berechnete Kanada 133,5 Millionen Stellen. Zur Erstellung des neuen Programms benötigte er rund 8 Monate, der Computer arbeitete 37 Stunden lang und druckte das Ergebnis auf 20 000 Blatt Papier aus.

5.1. Monte-Carlo-Methoden

Unter dieser Bezeichnung werden alle Verfahren zusammengefaßt, die sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bedienen, um einen Sachverhalt mit einer großen Anzahl von Versuchen bei einem Zufallsexperiment (daher die Bezeichnung mit dem Namen des Casinoparadieses) nachzuweisen.

5.1.1. Das Buffon'sche Nadelproblem

(vgl. KRANZER 1989, S.196 und *Mäder 1989, S.54f.)* Der Biologe George Louis Leclerc, Comte de Buffon, (1707-1788) warf im Jahre 1777 ein Problem auf, mit dem sich π rein statistisch approximieren läßt.
Bei diesem Zufallsexperiment wird eine Nadel auf eine Schar paralleler Linien geworfen, deren Normalabstand genau die Länge der Nadel beträgt. Nun stellt sich die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Nadel eine der Geraden berührt oder schneidet.
Hat man *n*-mal geworfen und *m*-mal das Querliegen registriert, so kommt der Quotient $\frac{m}{n}$ dem Wert von $\frac{2}{\pi}$ umso näher, je größer die Anzahl *n* der Versuche ist. Das heißt, daß $\frac{m}{n}$ gegen $\frac{2}{\pi}$ strebt.



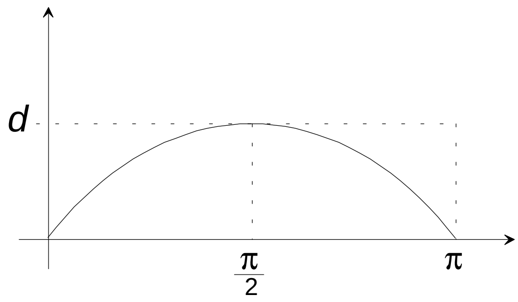
Wie in nebenstehender Skizze erkennbar, sind drei der Geraden eingezeichnet und mehrere Nadeln, von denen die oberste stellvertretend für alle übrigen beschriftet ist. *M* bezeichnet den Mittelpunkt der Nadel, *d* die halbe Nadellänge, *x* die Entfernung der näheren Geraden von *M* (die weiter entfernte Gerade kann aus Symmetriegründen vernachlässigt werden) und *2d* die Entfernung von zwei parallelen Geraden, die definitionsgemäß doppelt so groß wie die halbe Nadellänge *d* ist. α bezeichnet jenen Winkel, der von der Nadel und der Geraden eingeschlossen wird.

Alle möglichen Lagen der Nadel lassen sich somit durch zwei Ungleichungen darstellen:

$$0 \leq \alpha \leq \pi \text{ und } 0 \leq x \leq d \ ,$$

wobei $\sin\alpha \geq \frac{x}{d}$, was gleichbedeutend ist mit $d \cdot \sin\alpha \geq x$. Das bedeutet, daß *x* auch kleiner sein kann, was der Fall ist, wenn die Nadel eine Gerade schneidet und nicht nur berührt.

Da die beiden Parameter α und *x* in letztgenannter Beziehung stehen, lassen sie sich in einem Koordinatensystem darstellen, wie es nebenstehend abgebildet ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit läßt sich nun durch den Quotienten des Flächeninhalts des Rechtecks, der alle möglichen Lagen der Nadel bezeichnet, und der Fläche unter der Sinus-Kurve, die die „günstigen" Lagen, bei denen die Nadel eine Gerade schneidet, bezeichnet, berechnen:



Der Flächeninhalt des Rechtecks ist $A_R = d \cdot \frac{\pi}{2}$.

Jener unter der Sinus-Kurve errechnet sich aus:

$$A_{\sin} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \cdot \sin\alpha \, d\alpha = d \cdot (-1) \cdot \cos\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = d \cdot (-1) \cdot (-1 - 0) = d$$

Der Quotient $\frac{A_{\sin}}{A_R}$ läßt sich daher vereinfacht anschreiben:

$$\frac{A_{\sin}}{A_R} = \frac{d}{d \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \ .$$

Damit ist bewiesen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine Gerade berührt oder schneidet $\frac{2}{\pi}$ ist.

Der Italiener Lazzerini warf 1901 die Nadel 3408 mal und erreichte damit die ersten sechs Nachkommastellen von π, nämlich 3,1415929. R. Wolf (1850) erreichte in Zürich mit 5000 Würfen den Wert 3,1596 *(siehe Handbuch der Astronomie S.127; Mitteilungen der Berner Naturf. Gesellschaft 1850; S.85 und 209; zitiert nach Castellanos 1988, S.157f.)*, Smith (1855) mit 3204 Würfen 3,1553 und Fox (1894) mit 1120 Würfen für π den Wert 3,1419. *(vgl. MÄDER 1989, S.54)*

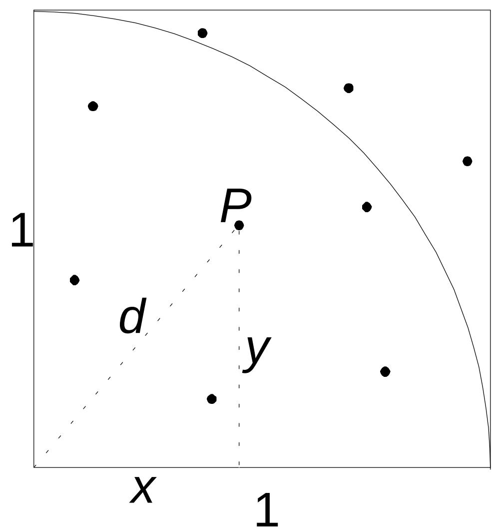
Ein Schüler von de Morgan soll bei 600 Versuchen den Wert 3,137 für π erhalten haben.

5.1.2. Wie man π „erschießt“

Man kann π aber nicht nur „erstechen“, sondern auch „erschießen“. Das folgende Verfahren beschrieb A. K. DEWDNEY 1988 *(S.56ff.)*

π wird approximiert, indem man einem Quadrat einen Viertelkreis einschreibt und hernach mit Zufallspunkten „beschießt“. Das Verhältnis der Punkte, die innerhalb des Kreisbogens liegen, zur Gesamtzahl der abgegebenen Schüsse nähert sich bei wachsender Schußzahl dem Verhältnis der Flächeninhalte von Viertelkreis und Quadrat. Folglich kann man sich π aus diesem Verhältnis berechnen.

Am einfachsten ist es, dieses Verfahren am Computer mittels einer geeigneten Programmiersprache zu simulieren. Das nachfolgende Turbo-Pascal Programm ist ausführlich kommentiert, doch die Grundstruktur soll hier noch einmal skizziert werden:



Am Bildschirm wird ein Quadrat gezeichnet, dem ein Viertelkreisbogen eingeschrieben wird. Nun „beschießt“ man dieses Quadrat mit Zufallspunkten. Dazu läßt man den Computer mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators Werte für die x-Koordinate und y-Koordinate des Punktes im Intervall [0;1] finden. Anschließend wird der Punkt am Bildschirm eingezeichnet, sodaß man die Verteilung selbst auf „Zufälligkeit“ überprüfen kann, und der Zähler `schuesse` erhöht. (Selbstverständlich kann auch der Computer keine echten Zufallszahlen finden. Vielmehr ermittelt er aus Datum, Uhrzeit und einem geeigneten Algorithmus eine Pseudozufallszahl, deren Qualität aber durch die graphische Darstellung überprüfbar wird. Sollten sich nämlich bestimmte Muster am Bildschirm erkennen lassen, so liegt ein schlechter Zufallszahlengenerator vor. In der aktuellen Turbo-Pascal Version 7.0 ist mir das aber nicht aufgefallen.) Die Entfernung vom

Mittelpunkt *M* läßt sich nun mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes berechnen: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Da man als Radius 1 E angenommen hat, kann man sich das Wurzelziehen ersparen, wodurch die Programmgeschwindigkeit optimiert wird. Ist *d* nun kleiner als 1, so liegt der betreffende Punkt innerhalb des Viertelkreises und der Zähler `treffer` wird erhöht. Alle zehn Schüsse wird die neue Approximation für π am Bildschirm ausgegeben. Das Programm schießt so lange, bis der Benützer eine Taste drückt oder ein Überlauf des Schußzählers droht.

```
program PI_APPROXIMATION_NACH_DER_MONTE_CARLO_METHODE;
uses crt, graph;       {Textmodus- und Grafikbefehle einbinden}
var
    schuesse,treffer, mittex, mittey, anzeige :word;
    x, y:real;                                                    {Koor
  ein:char;                                                       {Eing
const
    rad=100;           {Radius des Viertelkreises angeben}
function IntToStr(I:real;stellen, nachkomma:byte): String;
{Umwandlung  von  Zahlen  in  strings.  stellen  gibt  die
    Gesamtzahl der ausgegebenen Stellen, nachkomma die Zahl
    der
Nachkommastellen an}
var S: string[11];
begin
    Str(I:stellen:nachkomma, s);
    IntToStr := S;
end;
procedure init; {Initialisierung  des  Grafikbildschirms  und
    der Variablen}
var karte, modus:integer;
begin
    detectgraph(karte, modus);   {Grafikkarte identifizieren}
    initgraph(karte,   modus,   'c:\tp\BGI');   {Grafikmodus
    initialisieren. Pfad zu den Treibern angeben!}
    setfillstyle(0, white);                                       {Füll

    mittex:=getmaxx div 2; {x-Koordinate der Bildschirmmitte}
    mittey:=getmaxy div 2; {y-Koordinate der Bildschirmmitte}
end;

procedure reset;
begin
    cleardevice;
    rectangle(mittex - rad - 1, mittey - rad - 1, mittex +
    rad + 1, mittey + rad + 1); {Quadrat, das „beschossen"
    wird, zeichnen}
    arc(mittex - rad - 1, mittey + rad + 1, 0, 90, 2*rad +
    2); {Viertelkreisbogen zeichnen}
    outtextxy(mittex  -  rad  -  20,  mittey  +  rad  +  10,
    '(0|0)');   {Beschriftung}
```

```
    outtextxy(mittex  +  rad  -  15,  mittey  +  rad  +  10,
    '(1|0)');   {der ‚Zielscheibe"}
    outtextxy(mittex  -  rad  -  20,  mittey  -  rad  -  15,
    '(0|1)');   {mit Koordinaten}

    outtextxy(mittex - 100, mittey + 140, 'Schüsse:');
    outtextxy(mittex , mittey + 140, 'Treffer:');
    outtextxy(mittex  +  100,  mittey  +  140,  'Approximation
    für pi:');

    outtextxy(mittex - 185, mittey - 160, 'pi-Approximation
    nach der Monte-Carlo-Methode');
    outtextxy(mittex - 200, mittey + 180, 'Drücken Sie <p>
    für Pause und Einzelschritt, ');
    outtextxy(mittex - 104, mittey + 190, '<n> für Neustart
    und');
    outtextxy(mittex  -  104,  mittey  +  200,  '<ESC>,  um  zu
    beenden!');

    randomize;        {Zufallszahlengenerator initialisieren}
  ein:=chr(32);
  anzeige:=10;
    schuesse:=0;
    treffer:=0;                      {Variable zurücksetzen}
end;

procedure schiessen;
begin
    x:=random;        {x-Koordinate zufällig im Intervall [0;1] ermitt
    y:=random;        {y-Koordinate zufällig im Intervall [0;1] ermitt
    putpixel(round(mittex - rad + x*2*rad), round(mittey +
    rad  -  y*2*rad),  lightblue);  {Punkt  den  Koordinaten
    entsprechend am
    Bildschirm setzen}
    inc(schuesse);                                          {Schu
    if  (x*x  +  y*y)  <  1  then  inc(treffer);  {Innerhalb  des
    Viertelkreises? Dann Zähler erhöhen}
end;

procedure approximieren;                                    {Anza
begin
    bar(mittex - 100, mittey + 140 + 10, mittex - 100 + 38,
    mittey + 140 + 16);
    outtextxy(mittex   -   100,   mittey   +   140   +   10,
    inttostr(schuesse, 5, 0));
    bar(mittex , mittey + 140 + 10, mittex + 38, mittey +
    140 + 16);
    outtextxy(mittex , mittey + 140 + 10, inttostr(treffer,
    5, 0));
    bar(mittex + 100, mittey + 140 + 10, mittex + 100 + 65,
    mittey + 140 + 16);
    outtextxy(mittex   +   100,   mittey   +   140   +   10,
    inttostr(treffer/schuesse*4, 8, 6));
end;

begin
```

```
    init;                              {Initialisierung aufrufen}
    repeat
    reset;
      repeat
         schiessen;                                                      {Quad
         if schuesse mod anzeige=0 then approximieren;{alle 10 Schüsse
      if keypressed then ein:=readkey;
      if ein='p' then begin
            ein:=readkey;
            anzeige:=1;
         end else anzeige:=10;
      until (ein in ['n',chr(27)]) or (schuesse=65535);
         {bei Tastendruck oder vor Überlauf abbrechen}
    until ein=chr(27);
    closegraph;                       {In Textmodus zurückkehren}
end.
```

Bei drei Programmdurchläufen zu je 10 000 Schüssen erhielt ich beispielsweise die Näherungen 3,146162 , 3,164279 und 3,169600.

6. Kuriositäten und ein Paradoxon

6.1. Untersuchung der Ziffernfolge von π

Die große Anzahl an Dezimalstellen von π, die man durch Verwendung von Computern berechnen kann, stellt eine „Spielwiese“ für Statistiker und der Zahlenmystik verfallene Mathematiker dar. Zwei erstaunliche Entdeckungen sollen hier nur beispielhaft angeführt werden.

6.1.1. Magische Quadrate

T.E. Lobeck aus Minneapolis stieß auf das folgende magische Quadrat, in dem die Zahlen von 1 bis 25 eingetragen sind. Sodann setzte er die entsprechende Stellen von π ein und bemerkte zu seiner Überraschung, daß der Summe jeder Zeile die Summe einer Spalte entspricht. *(vgl. CASTELLANOS 1988, S.81)*

17	24	1	8	15	65
23	5	7	14	16	65
4	6	13	20	22	65
10	12	19	21	3	65
11	18	25	2	9	65
65	65	65	65	65	

Magisches 5×5 Quadrat

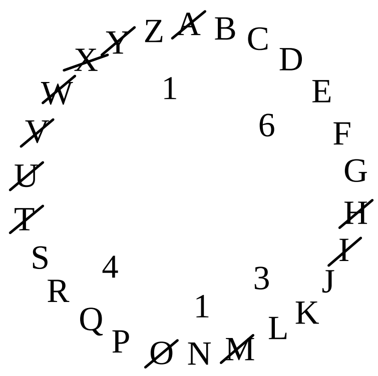
2	4	3	6	9	24
6	5	2	7	3	23
1	9	9	4	2	25
3	8	8	6	4	29
5	3	3	1	5	17
17	29	25	24	23	

Magisches Quadrat mit Ziffern

vo π
n

6.1.2. Kreiszahl und „Kreisbuchstaben“

Martin GARDNER erwähnte in einem persönlichen Gespräch mit Dario CASTELLANOS 1988 *(S.81)* folgende Kuriosität, die James Davis entdeckte.
Wenn man alle Buchstaben des lateinischen Alphabets in einem Kreis aufschreibt und jene, die eine vertikale Symmetrie besitzen, durchstreicht, so bleiben Gruppen zu 3, 1, 4, 1, und 6 Buchstaben übrig. Dies sind aber gerade die ersten fünf Ziffern des (gerundeten) Wertes von π.



6.2. Das Geheimnis der Ziffernfolge

π ist, entsprechend dem Beweis von Lindemann, eine transzendente Zahl. Das bedeutet, daß die Ziffernfolge von π nicht periodisch ist und keinem Gesetz gehorcht, sondern nur einer „Zufallsverteilung“ folgt. Daher müßte es irgendwo in diesem unendlichen Dezimalbruch einen Abschnitt geben, der diesen Satz, dieses Kapitel und diese Fachbereichsarbeit in codierter Form enthält. Dieser Gedanke läßt sich aber auch für größere „Datenmengen“, wie die Encyclopaedia Britannica, fortspinnen und in letzter Konsequenz kann man das Paradoxon und die Vermutung wagen, daß es in der Ziffernfolge von π Abschnitte für jedes Buch geben müßte, das jemals geschrieben wurde, geschrieben wird oder in Zukunft geschrieben werden könnte! *(vgl. GARDNER 1973, S.73f.)*

Der Sinn der Berechnung extrem vieler Stellen von π läßt sich mit zwei Sachverhalten erklären. Erstens bietet die Untersuchung der Dezimalbruchentwicklung von π die Möglichkeit, die „Zufälligkeit“ der Verteilung der zehn Ziffern in der Ziffernfolge von π zu untersuchen. Außerdem bieten entsprechende Computerprogramme eine sehr effiziente Methode, die Hardware der Computer zu testen, da schon ein kleiner Rechenfehler große Folgen hat und viele falsche Stellen erzeugt. *(vgl. PEITGEN 1992, S.181)*

7. Reihen und Produkte zur Approximation von π

„Erfinder“	**Jahr**	**Term**	**Konvergenzgeschwindigkeit***
Vieta	1592	$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots$	7 Glieder
Wallis		$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots$	3857 Glieder
Lord William Brouncker	1630 - 1684	$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}$	
Newton	1666	$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+24\cdot\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{28\cdot 2^7}-\frac{1}{72\cdot 2^9}-\ldots\right)$	
Gregory (1683-1675) und Leibniz	1673	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$	2455 Glieder
Gregory und Sharp	um 1700	$\frac{\pi^2}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3^1}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+.-..\right)$	
Euler	18. Jhdt.	$\frac{1}{1^{26}}+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\ldots=\frac{2^{24}\cdot 76\,977\,927\cdot\pi^{26}}{27!}$	
selbiger		$\pi=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot\ldots$	
selbiger		$\frac{\pi}{2}=1+\cfrac{2}{3+\cfrac{1\cdot 3}{4+\cfrac{3\cdot 5}{4+\cfrac{5\cdot 7}{4+\ldots}}}}$	

* Die Konvergenzgeschwindigkeit bedeutet hier die Anzahl der Glieder, die benötigt wird, um 3 Dezimalstellen von π zu bestimmen. Es wurden auf Grund des hohen Programmieraufwandes aber nicht alle Algorithmen berücksichtigt.

selbiger (Euler1)		$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$	1612 Glieder
selbiger (Euler2)		$\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots$	8 Glieder
C. F. Gauß (1777-1855)		$\pi=48\cdot\arctan\frac{1}{18}+32\cdot\arctan\frac{1}{57}-20\cdot\arctan\frac{1}{239}$	
Ramanujan (1887-1920)		$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n!)(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$	

8. Meilensteine in der Berechnung von π

Mathematiker	**Jahr**	**berechnete Stellen**	**falsche Stellen**
Vieta	1580	10 Stellen	alle korrekt
van Roomen	um 1600	15 Stellen	
van Ceulen	um 1605	35 Stellen	
Abraham Sharp (1651-1742)	1706	72 Stellen	
John Machin	1707	100 Stellen	
Thomas de Lagny	1719	127 Stellen	
Georg von Vega (1756-1802)	1793	140 Stellen	ab der 137. Stelle
Thibaut	1822	156 Stellen	
William Rutherford	1841	208 Stellen	ab der 153. Stelle
Zacharias Dase	1844	200 Stellen	
Thomas Clausen (1801-1885)	1847	248 Stellen	
William Rutherford	1853	440 Stellen	
Prof. Richter (Elbing)	1855	500 Stellen	
William Shanks (GB)	1874	707 Stellen	ab der 527. Stelle
D. F. Ferguson (GB)	1946	730 Stellen	
John W. Wrench, Jr. und Levi B. Smith	1947	808 Stellen	
G. W. Reitwieser (USA) auf ENIAC	1949	2 035 Stellen	
S. C. Nicholson und J. Jeenel auf NORC	1954	3 089 Stellen	
Felton auf Pegasus	1958	10 000 Stellen	
F. Genuis (Paris) auf IBM 704	1958	10 000 Stellen	
J. M. Gerard (London) auf IBM 7090	1961	20 000 Stellen	

Daniel Shanks und John W. Wrench, Jr. auf IBM 7090	1961	100 265 Stellen	
Guilloud und Bouyer auf CDC 7600	1973	1 000 000 Stellen	
Yoshiaki Tamura und Yasuma Kanada (Japan) auf HITAC M-280H	1983	$2^{24}(=16\,777\,216)$ Stellen	
Gosper auf Symbolics	1985	17 000 000 Stellen	
D. H. Bailey auf Cray-2	1986	29 360 000 Stellen	
Kanada auf SX 2	1987	$2^{27}(=134\,217\,728)$	
Kanada	1988	201 326 000 Stellen	
Kanada auf HITAC S-820/80	1989	1 073 740 000 Stellen	

9. Zusammenfassung

Die Form des Kreises beschäftigt die Menschen seit Jahrtausenden, denn spätestens seit der Erfindung des Rades haben Mathematiker immer wieder versucht, den Umfang oder auch den Flächeninhalt von Kreisen exakt zu bestimmen. Die Geschichte der Approximationen der Zahl π ist deshalb auch ursächlich mit den Versuchen, den Kreis zu „quadrieren", verbunden. Dieses Problem gehörte mit zu den drei berühmten der Antike: „Würfelverdopplung", „Winkeldreiteilung" und „Quadratur des Kreises".
Diese Fachbereichsarbeit soll nun einen Überblick über die Versuche verschiedenster Kulturen, π zu berechnen, bieten, wobei an Hand ausgewählter Beispiele besonders effektive oder bemerkenswerte Methoden gezeigt werden. Dabei lassen sich die Weiterentwicklung in der Rechentechnik und die Verfeinerung der Methoden von den Hochkulturen in Ägypten und Babylonien über das antike Griechenland, Mittelalter und Neuzeit bis ins Computerzeitalter heute beobachten. Darum dient ein einfaches Turbo-Pascal-Programm der Simulation einer Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung von π.
Weiters wird die immer exaktere Bestimmung des Werts von π aufgezeigt, was schließlich zur Frage nach deren Sinnhaftigkeit führt. Eine tabellarische Aufzählung einiger Reihen, Produkte und Reihenbruchentwicklungen bietet einen Überblick über die zur Approximation von π geeigneten Terme und eine Tabelle mit den zur jeweiligen Zeit bekannten Dezimalstellen von π faßt die Geschichte der Approximationen noch einmal zusammen. Das im Anhang beigefügte zweite Turbo-Pascal-Programm hat die Aufgabe, die Konvergenzgeschwindigkeit der aufgelisteten Terme zu bestimmen, so weit dies auf Grund der internen Rechengenauigkeit möglich ist.

10. Anhang

Das folgende Turbo-Pascal 7.0 Programm diente mir dazu die Konvergenzgeschwindigkeit der in obiger Tabelle angegebenen unendlichen Reihen und Produkte zu bestimmen.

```
program Piapproximationen;
uses crt;

procedure init;
begin
  textattr:=$0f;clrscr;
  writeln('                              Approximationen von
    pi');

  window(1,2,80,50);textattr:=$49;clrscr;

    window(2,3,79,39);textattr:=$07;clrscr;window(2,41,79,4
    9);textattr:=$1f;clrscr;
  textattr:=$17;writeln;
  write('       Gliederzahl                Näherung für pi
    Differenz');
  writeln;writeln;writeln;writeln;textattr:=$4f;
  write('    "Genauer" Wert für pi: ',pi:19:17);clreol;
end;

function eingabe(text:string;x,y:byte):char;
var taste:char;
begin
    gotoxy(x,y);
  textattr:=$07;
  write(text,'  ');write(chr(8));
  textattr:=$0f;
  if keypressed then taste:=readkey;
  taste:=readkey;
  eingabe:=taste;
  write(taste);
  if keypressed then taste:=readkey;
end;

procedure auswahl(var approx,stellen:byte);
var ein:char;
begin
  window(2,3,79,39);textattr:=$07;

  writeln;
    writeln('            Mit welchem Algorithmus wollen Sie
    die Berechnung durchführen?');
  writeln;
  writeln('                                A. Vieta');
  writeln('                                B. Wallis');
```

```
  writeln('                             C. Leibniz');
  writeln('                             D. Sharp');
  writeln('                             E. Euler 1');
  writeln('                             F. Euler 2');
  writeln;
  repeat  ein:=eingabe('Ihre  Wahl:',22,13)  until  ein  in
    ['a'..'f','A'..'F'];
  if  ein  in  ['a'..'f']  then  approx:=ord(ein)-96  else
    approx:=ord(ein)-64;

  writeln;writeln;writeln;textattr:=$07;
  writeln('                        Wieviele Stellen (1-8)
    möchten Sie berechnen?');
  repeat  ein:=eingabe('Ihre  Wahl:',22,18)   until  ein  in
    ['1'..'8'];
  stellen:=ord(ein)-48;
end;

function beenden:boolean;
var ein:char;
begin
  window(2,30,79,39);textattr:=$07;
    writeln('             Wollen Sie noch eine Berechnung
    durchführen <R> oder beenden <E>?');
  writeln;
  repeat  ein:=eingabe('Ihre  Wahl:',22,3)   until  ein  in
    ['r','R','e','E'];
  if   ein   in   ['e','E']   then   beenden:=true   else
    beenden:=false;
  clrscr;
end;

procedure ausgabe(n:longint;wert:real);
begin
  window(2,41,79,49);
  textattr:=$1f;
    gotoxy(4,5);
  write(n:8,'                 ',wert:19:17,'       ',wert-
    pi:20:17);
end;

procedure berechnung(term,stellen:byte);
var  t_1,e:real;
       n:longint;
    ein:char;
    vorherok:boolean;

    function potenz (Basis: integer;  expon: integer):real;
  var i:integer;
       pot:real;
    begin
      if expon = 0 then potenz := 1
      else begin
     pot:=1;
         for i:=1 to expon do begin
            pot:=pot*basis;
```

```
      end;
      potenz:=pot;
    end;
    end;

    function FAKUL(x:integer):real;
    begin
      if x<=1 then fakul:=x
          else fakul:=x*fakul(x-1);
    end;

    function stellenok:boolean;
  begin
    if
    trunc(e*potenz(10,stellen))=trunc(pi*potenz(10,stellen)
    )
          then stellenok:=true
      else stellenok:=false;
  end;

  function vieta(glied:longint):real;
  begin
    if glied=1 then vieta:=sqrt(0.5)
    else   vieta:=sqrt(0.5+0.5*vieta(glied-1));   {rekursive
    Programmierung!}
  end;

  function wallis(glied:longint):real;
  begin
      wallis:=(glied+glied mod 2)/(glied+(glied+1) mod 2);
  end;

  function leibniz(glied:longint):real;
  begin
    leibniz:=potenz(-1,(glied+1) mod 2)/(2*glied-1);
  end;

  function sharp(glied:longint):real;
  begin
    sharp:=potenz(-1,(glied+1)  mod  2)/((2*n-1)*potenz(3,n-
    1));
  end;

  function euler1(glied:longint):real;
  begin
    euler1:=1/sqr(glied);
  end;

  function euler2(glied:longint):real;
  begin
    euler2:=1/glied/glied/glied/glied;
  end;

begin
  ein:=readkey;
  e:=1;
```

```
  n:=1;
     case term of
        1:t_1:=vieta(1);
        2:t_1:=wallis(1);
    3:t_1:=leibniz(1);
    4:t_1:=sharp(1);
    5:t_1:=euler1(1);
    6:t_1:=euler2(1);
  end;
     repeat
    vorherok:=stellenok;
    inc(n);
       case term of
       1:begin
           t_1:=t_1*vieta(n);
           e:=2/t_1;
         end;
       2:begin
           t_1:=t_1*wallis(n);
           e:=t_1*2;
         end;
      3:begin
           t_1:=t_1+leibniz(n);
           e:=t_1*4;
       end;
      4:begin
           t_1:=t_1+sharp(n);
           e:=2*sqrt(3)*t_1;
       end;
      5:begin
           t_1:=t_1+euler1(n);
           e:=sqrt(t_1*6);
       end;
      6:begin
           t_1:=t_1+euler2(n);
           e:=sqrt(sqrt(t_1*90));
       end;
    end;
    ausgabe(n,e);
  until stellenok and vorherok;
end;

procedure menue;
var term,stellen:byte;
begin
  repeat
       auswahl(term,stellen);
       berechnung(term,stellen);
  until beenden;
end;

BEGIN
  init;
  menue;
END.
```

11. Bibliographie

BAUER, M.: Die Zahl π. Maturahausarbeit, 1927/28

BOYER, CARL B.: A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney 1968

BRONŠTEJN, I.N., Semendjajew K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Deutsch, Stuttgart, Leipzig; B.G.Teubner, Thun und Frankfurt am Main, 25. Auflage 1991

CASTELLANOS, D.: The Ubiquitous π. Aus: Mathematics Magazine, S.67-98, Vol.61, No.2, April 1988 und S.148-163, Vol.61, No.3, June 1988

DEWDNEY, A. K.: Computer-Kurzweil. Spektrum-der-Wissenschaft-Verlagsgesellschaft, Heidelberg 1988

EHRENFRIED HOFMANN, J.: Geschichte der Mathematik. In: Sammlung Göschen Bd.226, Erster Teil, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1953

GARDNER, M.: Mathematische Knobeleien. Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig 1973

KOECHER, M.: Klassische elementare Analysis. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston 1987

KRANZER, W.: So interessant ist Mathematik. Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln 1989

MÄDER, P.: Ein historischer Überblick zur Berechnung der Kreiszahl. Aus: ZDM 89/2

MAINZER, K.: Geschichte der Geometrie. B·I·-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1980

MÖWALD, R.: Eine analytische Idee von Wallis (1616-1703). Aus: Wurzel - Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten e.V. (Hrsg.): Die $\sqrt{\text{Wurzel}}$ S.115-118, Heft 6/93, Jena 1993

KAISER, H.; NÖBAUER, W.: Geschichte der Mathematik. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1984

PECH J.: ITERATIONEN und einige Anwendungen. Referat, gehalten am 31. März 1989 im Rahmen der Lehrerfortbildungstagung 1989 (veranstaltet von der Didaktik-Kommission der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und dem Pädagogischen Institut des Bundes für Niederösterreich)

PEITGEN H.-O.: Fractals For The Classroom, Part One: Introduction to fractals and chaos. Springer-Verlag, New York 1992

REICHEL, H.-C. (Hrsg.): Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1991

REICHEL, H.-C., MÜLLER, R., HANISCH, G. und LAUB, J.: Lehrbuch der Mathematik 7. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 2.Auflage 1992

SIMON, H.: Mathematik, Formeln und Gesetze. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 4.Auflage 1985

WELLS, D.: Das Lexikon der Zahlen. Fischer Taschenbuch Verlag GmbH, Frankfurt am Main 1990

WIESENBAUER, J.:Algorithmen zur numerischen Berechnung von π. In: Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II. In der Schriftenreihe: Didaktik der Mathematik. Verlag Johannes Heyn, S.301-308 Band 1 Klagenfurt 1976

Ich erkläre, daß ich diese Fachbereichsarbeit selbst verfaßt habe und daß außer der angegebenen Literatur keine weitere verwendet wurde.